赵元任是最早提出实数上的归纳法的人

Peter Clark独立提出了一种实数上的归纳：

令 𝑎<𝑏 为实数。定义 𝑆⊆[𝑎,𝑏] 为归纳的（inductive）如果：

1. 𝑎∈𝑆
2. 如果 𝑎≤𝑥<𝑏 ，那么对于某 𝑦>𝑥 ，𝑥∈𝑆⟹[𝑥,𝑦]⊆𝑆
3. 如果 𝑎<𝑥≤𝑏 并且 [𝑎,𝑥)⊆𝑆 ，那么 𝑥∈𝑆

我们可以证明 𝑆 如果是归纳的，那么 𝑆=[𝑎,𝑏] .

这个方法的一些应用：

* 从 [𝑎,𝑏] 到 𝑅 上的连续函数𝑓:[𝑎,𝑏]→𝑅 是连续的

证明：令 𝑆 为 是有界的{𝑥∈[𝑎,𝑏]|𝑓:[𝑎,𝑥]→𝑅是有界的} .我们证明 𝑆 是归纳的.

1. 显然 𝑎∈𝑆 ;
2. 假设 𝑥∈𝑆 ，那么 𝑓 在 [𝑎,𝑥] 上是有界的。因为 𝑓 在 𝑥 上连续，存在 𝛿>0 使得对于所有 𝑦∈[𝑥−𝛿,𝑥+𝛿],|𝑓(𝑦)|≤|𝑓(𝑥)|+1 。所以 𝑓 在 [𝑥,𝑥+𝛿] 上也是有界的。
3. 假设 𝑥∈(𝑎,𝑏] 并且 [𝑎,𝑥)⊆𝑆 . 因为 𝑓 在点 𝑥 上连续，存在 0<𝛿<𝑥−𝑎 使得 𝑓 在 [𝑥−𝛿,𝑥] 上有界。

这个方法还可以用来证明中值定理、Bolzano–Weierstrass定理、一致连续定理等等。

**来源**

Pete L. Clark (2019) The Instructor’s Guide to Real Induction, Mathematics Magazine, 92:2, 136-150